El problema de Dirichlet y otros problemas de peso

María J. Carro

Universidad de Barcelona

Universidad Carlos III, enero 2015

El problema de Dirichlet

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

Enunciado general

Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y una función $f : \delta\Omega \to \mathbb{R}$, el problema de Dirichlet consiste en encontrar una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Delta u = 0, \qquad u_{|\delta\Omega} = f,$$

donde Δ es el Laplaciano:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Interpretación física

Este problema modeliza fenómenos físicos estacionarios, es decir, independientes del tiempo, y es el ejemplo típico de lo que en EDPs se llama una ecuación elíptica.

Ecuación del calor:

$$\Delta u(x,t) = a^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \implies \Delta u(x) = 0$$

* Fijar la temperatura sobre el contorno de un dominio de acuerdo, la temperatura fluye hasta que alcanza un estado estacionario en el dominio. La distribución de la temperatura en el interior será entonces la solución correspondiente al problema de Dirichlet.

Ecuación de ondas:

$$\Delta u(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \implies \Delta u(x) = 0$$

* Propagación de ondas en regimen estacionario.

El problema de Dirichlet. Historia

History

* George Green (1828): Redujo el problema a la construcción de funciones de Green.

* Karl Friedrich Gauss (1840): Teoría del potencial.

* Lord Kelvin and P.G. Dirichlet (1847): sugirieron minizar la energía

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$$

sujeta a la condición inicial. Cálculo de variaciones.

El problema de Dirichlet. Historia

Historia

* Weierstrass, Riemann, ...

* Stanislaw Zaremba (1911): Fue el primero que observó que había regiones en los que el problema de Dirichlet no tenía solución: $\Omega = D \setminus \{0\}$.

* Henri Lebesgue (1913) dio un ejemplo en el que el problema de Dirichlet no tenía solución y el dominio tenía frontera conexa.

El problema de Dirichlet. Historia

From 1920 ...

Los siguientes tres metodos fueron los más populares:

El método de Poincaré en el que se usaban funciones subharmónica: Método de Perron.

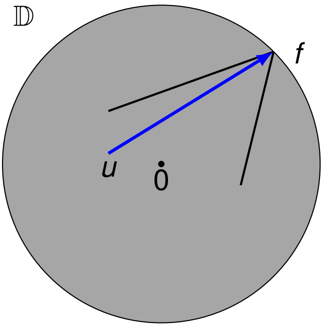
Método de ecuaciones integrales basadas en teoría del potencial.

Metodos variacionales relativos al problema de minizar la Energía de Dirichlet.

El problema de Dirichlet en dominios simplemente conexos

Dominios acotados: Disco unidad

Dada $\mathbb{D}$ el disco unidad y dada una función $f \in L^p(\mathbb{T})$, existe $u \in h(\mathbb{D})$ tal que $u = f$ en $\mathbb{T}$.



$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial \mathbb{D}} = f \end{cases}$$

El problema de Dirichlet en dominios simplemente conexos

Disco unidad: Solución

$$u(r,\theta) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-s)+r^2}ds = (P_r * f)(\theta),$$

with P_r the Poisson kernel

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

Pregunta:

$$\lim_{r\to 1}(P_r * f)(\theta) = f(\theta), \qquad a.e.\ \theta,\ \forall f \in L^p(\mathbb{T})?$$

El problema de Dirichlet en el disco unidad

Filosofía del Operador Maximal

Si

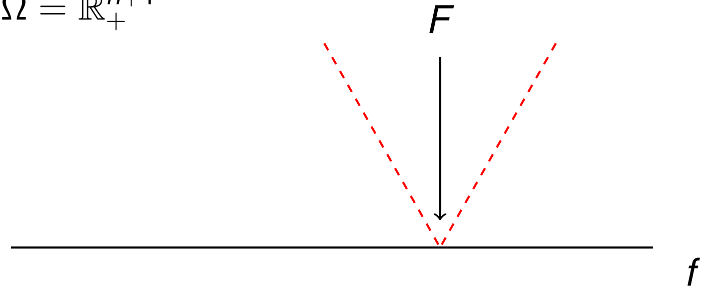
$$\sup_{r>0} |P_r * f| : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$$

es acotado, entonces

$$\lim_{r \to 1} (P_r * f)(\theta) = f(\theta), \qquad a.e.\ \theta,\ \forall f \in L^p(\mathbb{T}).$$

El problema de Dirichlet en el semiespacio superior

$$\Omega = \mathbb{R}^{n+1}_+$$



$\mathbb{R}^{n+1}_+$: Solución

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t) f(y)\,dy = (K_t * f)(x)$$

with $K(y,t) = K_t(y)$ the Poisson kernel

$$K(y,t) = \frac{c_n t}{(|y|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad y \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

Pregunta:

$$\lim_{t\to 0} (K_t * f)(x) = f(x), \qquad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)?$$

El problema de Dirichlet en el semiespacio superior

Filosofía Operador maximal

Si

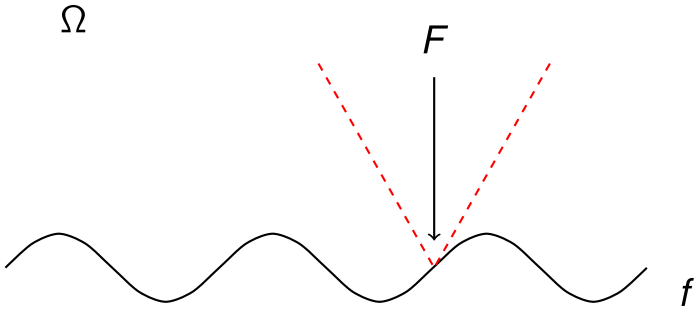
$$\sup_{t>0} |K_t * f| : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$$

es acotado, entonces

$$\lim_{t\to 0} (K_t * f)(x) = f(x), \qquad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Dominios Regular

Tiene el problema de Dirichlet solución en un dominio Ω con frontera de clase C^1?



El problema de Dirichlet en dominios regulares

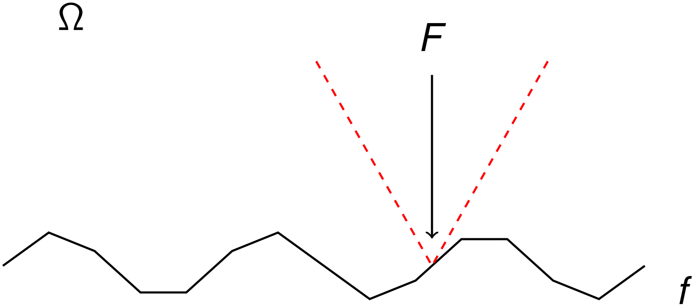
Dominios de clase C^1 (Dahlberg, Fabes-Jodeit-Riviere, Kenig 1979-1980)

Dado un dominio simplemente conexo U con frontera ∂U de clase C^1 y dada $f \in L^p(\partial U, ds)$ y $1 < p < \infty$, existe $F \in h(U)$ tal que $F = f$ en ∂U.

El problema de Dirichlet en dominios no acotados

Dominios Lipstchitz

Tiene el problema de Dirichlet solución en un dominio Lipschitz Ω?



Lipschitz: $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$

El problema de Dirichlet en dominios no acotados

Dominios no acotados Lipschitz (C. Kenig, 1980)

Dado

$$\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > \nu(t)\}.$$

ν una funcion Lipschitziana, y dada $f \in L^p(\partial\Omega)$ y $2 \leq p < \infty$, existe $F \in h(\Omega)$ tal que $F = f$ en $\partial\Omega$.

El problema de Dirichlet en dominios no acotados

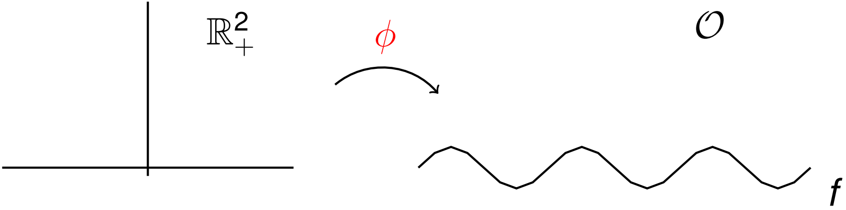
Dominios no acotados Lipschitz (C. Kenig, 1980)

Dado

$$\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > \nu(t)\}.$$

ν una funcion Lipschitziana, y dada $f \in L^p(\partial\Omega)$ y $2 \leq p < \infty$, existe $F \in h(\Omega)$ tal que $F = f$ en $\partial\Omega$.

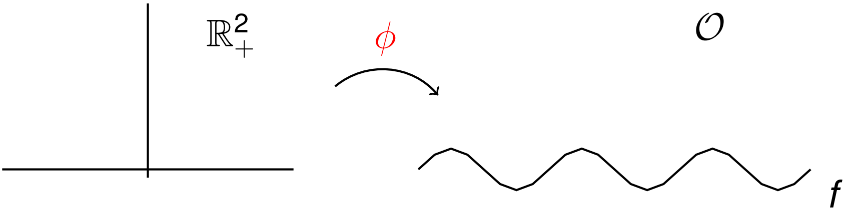
El problema de Dirichlet en dominios no acotados



Observación: cambio de variable

Si $f \in L^p(\partial\Omega)$, entonces $f \circ \phi \in L^p(|\phi'|)$.

El problema de Dirichlet en dominios no acotados



(C. Kenig, 1980)

Si $\phi : \mathbb{R}^2_+ \to \mathcal{O}$ es una aplicación conforme exhaustiva tal que $\phi(\infty) = \infty$, entonces $|\phi'| \in A_2$.

Clase A_2

Definición

$w \in A_2$ si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right)^{1/2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-1} \right)^{1/2} < \infty,$$

donde Q es un cubo en $\mathbb{R}^n$.

Pesos de Muckenhoupt

Benjamin Muckenhoupt.

Peso

Un peso w es una función positiva definida sobre un espacio de medida que es localmente integrable.

Pesos

Pesos de Muckenhoupt A_p

Un peso $w \in A_p$ $(p > 1)$ si

$$\|w\|_{A_p}^{1/p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{1/p'} < \infty,$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

$$\|w\|_{A_1} = \text{ínf}\left\{C > 0 : Mw(x) \leq Cw(x), \ \text{a.e. } x\right\}.$$

Una definición fácil de recordar

$$1 = \frac{1}{|Q|}\int_Q 1\,dx = \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-1} w(x)dx$$

$$\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{1/p'}$$

$$\leq \|w\|_{A_p}^{1/p}.$$

Satisface una desigualdad de Hölder inversa

$$\int f(x)g(x)d\mu(x) \leq \left(\int f(x)^p d\mu(x)\right)^{1/p}\left(\int g(x)^{p'} d\mu(x)\right)^{1/p'}.$$

Pesos de Muckenhoupt

Consecuencia:

Si $w \in A_\infty := \cup_p A_p$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta}(x)dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \frac{C_w}{|Q|}\int_Q w(x)dx.$$

Mejoran la integrabilidad

Propiedad de los pesos A_p

Si $1 \leq p \leq q$,

$$A_1 \subset A_p \subset A_q \subset A_\infty$$

El problema de Dirichlet en dominios no acotados

Teorema (C. Kenig, 1980)

Sea
$$p_0 = \text{ínf}\{q > 1 : |\phi'| \in A_q\}.$$
Dada $f \in L^p(\partial\Omega, ds)$ y $p_0 < p < \infty$, existe $F \in h(\Omega)$ tal que $F = f$ en $\partial\Omega$.

Teorema (C. Kenig, 1980)

Sea

$$p_0 = \text{ínf}\{q > 1 : |\phi'| \in A_q\}.$$

Dada $f \in L^p(\partial\Omega, ds)$ y $p_0 < p < \infty$, existe $F \in h(\Omega)$ tal que $F = f$ en $\partial\Omega$.

El problema de Dirichlet en dominios no acotados

Propiedad de automejora de los pesos A_p

Si $1 \leq p \leq q$,

$$A_1 \subset A_p \subset A_q \subset A_\infty$$

pero

$$w \in A_p \implies \exists \varepsilon > 0; w \in A_{p-\varepsilon}.$$

Consecuencia:

$$p_0 = \text{ínf}\{q > 1 : |\phi'| \in A_q\} \neq \text{mín}\{q > 1 : |\phi'| \in A_q\}$$

Kenig, C., *Weighted L^p-spaces in Lipschitz domains*, Amer. J. Math. **102** (1980), 129–163.

El problema de Dirichlet en dominios simplemente conexos

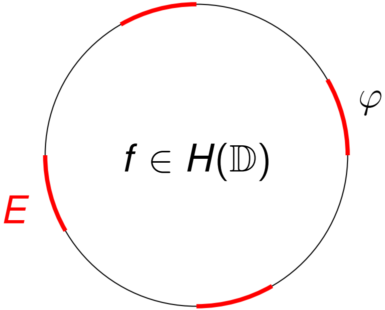
Dominios acotados Lipschitz (Dahlberg, 1979)

Dado un dominio acotado U con frontera ∂U Lipschitz y dada $f \in L^p(\partial U, ds)$, $2 \leq p < \infty$, existe $F \in h(U)$ tal que $F = f$ en ∂U.

Dahlberg, B., *On the Poisson integral for Lipschitz and C^1-domain*, Studia Math. **66** (1979).

Conjuntos frontera de interpolación

Sea $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ y sea $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. Dado un conjunto $E \subset \mathbb{T}$ y dada una función φ definida en E, cúando es cierto que existe una función $f \in H(\mathbb{D})$ tal que $f = \varphi$ en E?



Un problema clásico en variable compleja

Teorema Rudin-Carleson (1956/57)

Sea $E \subset T$ un subconjunto cerrado tal que $|E| = 0$ y sea φ una función continua en E. Entonces existe una función

$$f \in A(\mathbb{D}) = H(\mathbb{D}) \cap C(\mathbb{T})$$

tal que $f = \varphi$ en E.

Más aún, si para toda $\varphi \in C(E)$, existe $f \in A(\mathbb{D})$ tal que $f = \varphi$ en E, entonces $|E| = 0$.

Un problema clásico en variable compleja

Conjuntos frontera de interpolación

Consideremos el espacio

$$A^1(\mathbb{D}) = \{f \in A(\mathbb{D}) : f' \in A(\mathbb{D})\}$$

y supongamos que $\varphi \in C^1(E)$. ¿Cúando es cierto que existe una función $f \in A^1(\mathbb{D})$ tal que $f = \varphi$ y $f' = \varphi'$ en E?

Teorema (J. Bruna, 1981)

Sea $E \subset \mathbb{T}$ un subconjunto cerrado y sea $\varphi \in C^1(E)$. Entonces existe una función $f \in A^1(\mathbb{D})$ tal que $f = \varphi$, $f' = \varphi'$ en E si y solo si existe $0 < \alpha < 1$ tal que:

$$\text{Si} \quad \rho(x) = d(x, E), \quad \rho : \mathbb{T} \to \mathbb{R} \implies \rho^{-\alpha} \in A_2.$$

El espacio BMO

Se define el espacio *BMO* como el conjunto de las funciones $f \in L^1_{\text{loc}}$ tal que

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q| < \infty, \qquad f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f.$$

Desigualdad de John-Nirenberg (1961)

Si $f \in BMO$, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q e^{\alpha |f(x) - f_Q|} dx < \infty.$$

Relación con los pesos de Muckenhoupt

$$f \in BMO \implies \forall p > 1, \ \exists \alpha_p > 0 : e^{\alpha_p f} \in A_p$$

y

$$w \in A_p \implies \log w \in BMO.$$

El espacio BMO

Se define el espacio *BMO* como el conjunto de las funciones $f \in L^1_{\text{loc}}$ tal que

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q| < \infty, \qquad f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f.$$

Relación con los pesos de Muckenhoupt

$$f \in BMO \implies \forall p > 1,\ \exists \alpha_p > 0 : e^{\alpha_p f} \in A_p$$

y

$$w \in A_p \implies \log w \in BMO.$$

Conjuntos bien distribuidos

Los puntos del conjunto E han de estar bien distribuidos:

(i) El conjunto perfecto de Cantor es bueno.

(ii) Para conjuntos formados por una sucesión de puntos con un límite, la condición está relacionada con la velocidad de convergencia.

$$E = \{e^{\frac{i}{n}}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}, \qquad \text{No}$$

$$E = \{e^{\frac{i}{2^n}}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}, \qquad \text{Si}$$

Referencias y más resultados

Extensiones

(i) Extensiones a los espacios C^p y al correspondiente espacio de funciones analíticas A^p, $p \in \mathbb{N}$.

(ii) Extensiones a espacios de funciones Lipschitzianas cuando p no es un natural.

Alexander, H.; Taylor, B. A.; Williams, D. L., *The interpolating sets for A^∞.* J. Math. Anal. Appl. **36** (1971), 556–566.

Dynkin-Hruscev, *Interpolation by boundary values of smooth analytic functions.* Soviet Nath. Dokl **15** (1974), 1083–1086.

Bruna, J. *Boundary interpolation sets for holomorphic functions smooth to the boundary and BMO.* Trans. Amer. Math. Soc. **264** (1981), no. 2, 393–409.

EDP elípticas en forma de divergencia

Teorema (Garofalo-Lin, 1986)

Sea $\Omega \subset B(0,2)$ un conjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ y sea $A(x)$ una matriz simétrica $n \times n$ cuyas entradas son funciones Lipschitzianas y tal que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leq \frac{1}{\lambda}|\xi|^2.$$

Si $u \in H^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es una solución débil del problema

$$Lu = \operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = 0, \qquad x \in \Omega$$

entonces $u, |\nabla u| \in A_\infty = \cup_p A_p$.

$u(x_0) = 0 \implies u \equiv 0.$

Consecuencia:

En particular, si u tiene un cero de orden infinito en un $x_0 \in \Omega$, entonces $u \equiv 0$

$$\int_{B(x_0,R)} u^2(x)dx = O(R^N), \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Operador maximal de Hardy-Littlewood

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

Observación:

$$Mf(x_0) = 0 \implies f \equiv 0.$$

$u(x_0) = 0 \implies u \equiv 0.$

Caracterizaciones de A_1 (R. Coifman y R. Rochberg, 1980)

Se cumple que

$$A_1 \approx \{(Mh)^\alpha : h \in L^1_{\mathrm{loc}}, 0 \leq \alpha < 1\}$$

Caracterizaciones de A_p (P. Jones, 1980)

Se cumple que

$$A_p \approx \{(Mh_1)^{\alpha_1}(Mh_2)^{\alpha_2(1-p)} : h_j \in L^1_{\mathrm{loc}}, 0 \leq \alpha_j < 1\}$$

Convergencia de la Serie de Fourier

Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$,

$$Sf(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}, \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Pregunta

Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, ¿Cúando es cierto que

$$S_N f(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{in\theta} \longrightarrow f?$$

Relación con el problema de Dirichlet en el disco unidad

Pregunta

Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, ¿cúando es cierto que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta} = f(\theta)?$$

Pregunta más fácil

Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, ¿cúando es cierto que

$$Sf(\theta, r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta} r^n \longrightarrow f(\theta)?$$

Relación con el problema de Dirichlet en el disco unidad

Conexión

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta} r^n = (P_r * f)(\theta) = u(re^{i\theta}).$$

$$\Delta u = 0, \qquad u_{\mathbb{T}} = f.$$

Convergencia de la Serie de Fourier: Resultados Clásicos

Resultado negativo: Dubois Reymond (1873)

Existe una función continua tal que la serie de Fourier diverge en un punto. Es más, diverge en un conjunto denso.

Resultado negativo: Kolmogorov (1923)

Existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que

$$S_N f(\theta) \nrightarrow f(\theta), \qquad a.e.\ \theta$$

Convergencia de la Serie de Fourier: Resultados Clásicos

Lennart Carleson.
Premio Abel 2006.

Theorem

Si $p > 1$,

$$S_N f(\theta) \longrightarrow f(\theta),\ a.e.\ \theta, \forall f \in L^p.$$

Convergencia de la Serie de Fourier

Dada $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, $n > 1$, ¿cúando es cierto que

$$S_N f \longrightarrow f?$$

Resultados conocidos

(1) Para todo $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$,

$$S_N f \longrightarrow f, \qquad (L^2)$$

(2) Si $p \neq 2$, existe $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ tal que

$$S_N f \nrightarrow f, \qquad (L^p), \qquad \text{C. Fefferman (1971)}$$

(3) Pregunta abierta: si $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$,

$$¿S_N f(\theta) \longrightarrow f(\theta), \; a.e. \; \theta?$$

Convergencia de la Serie de Fourier: Funciones radiales

Problema más sencillo

Dada $f \in L^p$, f radial, ¿es cierto que

$$S_N f(\theta) \longrightarrow f(\theta)?$$

Observación

Sea $f(x) = f_0(|x|)$ una función radial

$$f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \Longleftrightarrow \quad f_0 \in L^p(r^{n-1})$$

y existe una relación entre

$$S_N f(x) \quad \approx \quad S_N(g_0)(r), \quad g_0(s) = f_0(s) s^{\frac{n-1}{2}}.$$

Convergencia de la Serie de Fourier: Funciones radiales

Hunt-Muckenhoupt-Wheeden, 1973

$$L^p(w) - \lim_N S_N f = f, \qquad \forall f \in L^p(w) \qquad \Longleftrightarrow \qquad w \in A_p$$

Corolario

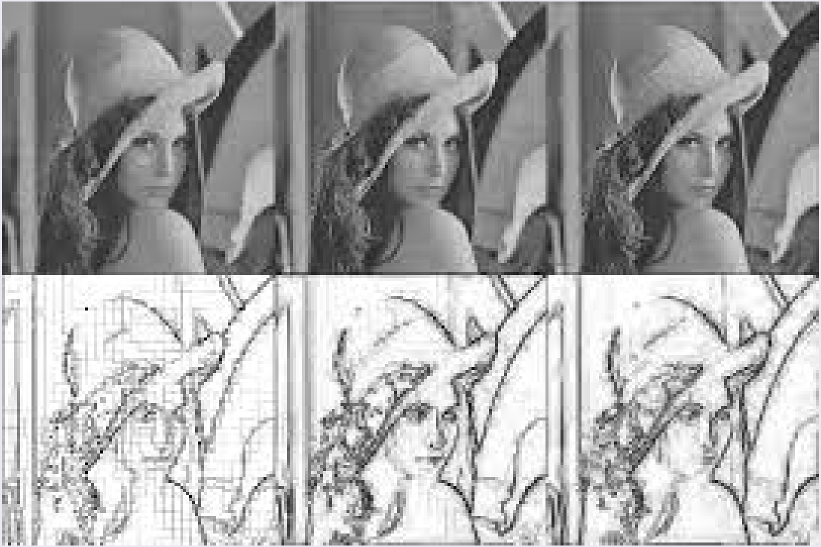
Si f es radial,

$$L^p - \lim_N S_N f = f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}.$$

Créditos:

Prestini, Herz, Kenig-Tomas, ...

Teoría de Wavelets



Definición rápida

La teoría de las wavelets es una alternativa al análisis de Fourier que tiene la ventaja de que permite analizar mejor las señales en tiempo y en frecuencia simultaneamente.

Definición rigurosa

Una función $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ es una ondícula (wavelet) si el conjunto

$$\mathcal{A} = \{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k) : \ j, k \in \mathbb{Z}\}$$

es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Definición

Dada una wavelet $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, la serie de Fourier asociada

$$S_\phi(f) = \sum_{j,k} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}$$

Definición

Dado un espacio X, diremos que $\mathcal{A}$ es una base incondicional de X si, para todo $f \in X$,

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}$$

converge incondicionalmente.

(VI) Wavelets

Teorema (I. Daubechies, 1992)

Sea $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ una ondícula tal que, para un $\varepsilon > 0$ y $j = 0, 1$,

$$|\phi^{j)}(x)| \leq (1 + |x|)^{-1-\varepsilon}, \qquad \forall x.$$

Entonces, para todo $1 < p < \infty$, $\mathcal{A}$ es una base incondicional de $L^p(\mathbb{R})$.

Teorema (P. Lemarié, 1994)

Si ϕ tiene soporte compacto y satisface una condición tipo Lipschitz, entonces $\mathcal{A}$ es una base incondicional de $L^p(w)$ si y solo si $w \in A_p$ $(p > 1)$.

¿Que tienen en común todos estos problemas?

La solución pasa por demostrar que un determinado operador es acotado en un espacio $L^p(w)$:

$$T : L^p(w) \longrightarrow L^p(w).$$

*Operador maximal de Poisson
* Operador integral de Cauchy
* Operador maximal de Hardy-Littlewood
* Operador de las sumas parciales de la serie de Fourier
* Operador transformada de Hilbert
* ...

Operadores importantes

*Operador maximal de Poisson

$$P^* f(\theta) = \sup_{0<r<1} |(P_r * f)(\theta)|, \qquad P^* f(x) = \sup_{t>0} |K_t * f)(\theta)|$$

* Operador integral de Cauchy y transformada de Hilbert

$$Cf(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(s)}{z-s} d\sigma(s), \qquad Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

* Operador de las sumas parciales de la serie de Fourier

$$S^* f(\theta) = \sup_N |S_N f(\theta)|$$

* Operador maximal de Hardy-Littlewood
* ...

Muckenhoupt

Teorema (Muckenhoupt, 1972)

El operador maximal de Hardy-Littlewood

$$Mf(x) = \sup_r \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

satisface en el caso $p > 1$,

$$M : L^p(w) \longrightarrow L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p.$$

Resolución del Problema de Dirichlet

El operador maximal de Hardy-Littlewood mayora al operador maximal de Poisson

$$P^* f(x) \leq CMf(x)$$

y, por tanto, si $p > 1$,

$$P^* : L^p(w) \longrightarrow L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p.$$

Teorema (Muckenhoupt, 1972)

La transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

satisface si $p > 1$,

$$H : L^p(w) \longrightarrow L^p(w) \quad \iff \quad w \in A_p.$$

Muckenhoupt

Teorema (Muckenhoupt, 1972)

El operador conjugado

$$Cf(\theta) = \int_{\mathbb{T}} f(y) \cot(\theta - y) dy$$

satisface si $p > 1$,

$$C : L^p(w) \longrightarrow L^p(w) \quad \iff \quad w \in A_p.$$

Corolario

El operador de Carleson S^*, asociado a las sumas parciales de la serie de Fourier, satisface

$$w \in A_p, \ p > 1 \quad \Longrightarrow \quad S^* : L^p(w) \longrightarrow L^p(w).$$

Y si $p = 1$?

Espacio de tipo débil

$$L^{1,\infty}(w) = \{f : \|f\|_{L^{1,\infty}(w)} = \sup_{y>0} yw(\{|f| > y\}) < \infty\}$$

Entonces:

Acotación positiva

$$w \in A_1 \implies M, P^*, H, C : L^1(w) \longrightarrow L^{1,\infty}(w).$$

Acotación negativa

$$S^* : L^1(w) \not\twoheadrightarrow L^{1,\infty}(w).$$

Filosofía

Acotacion operador maximal $\implies$ Convergencia a.e.

Si

$$T^*f(x) = \sup_{r>0} |T_r f(x)| : L^1(w) \to L^{1,\infty}(w)$$

es acotado, entonces

$$\lim_{r\to 1} (T_r f)(\theta) = f(\theta), \qquad a.e.\ \theta,\ \forall f \in L^1(w).$$

Resumen

Nuestro objetivo:

Estudiar acotación de operadores (maximales o no) en espacios de Lebesgue con pesos.

Teoría de extrapolación de Rubio de Francia

José Luis Rubio de Francia.

Teorema (Rubio de Francia, 1984)

Si T es un operador sublineal y

$$T : L^{p_0}(w) \longrightarrow L^{p_0}(w),$$

para todo $w \in A_{p_0}$, $p_0 \geq 1$, entonces, para todo $p > 1$,

$$T : L^p(w) \longrightarrow L^p(w), \qquad \forall w \in A_p.$$

Teoría de extrapolación de Rubio de Francia

Una observación importante

Si

$$\|g\|_{L^{p_0}(w)} \leq N(\|w\|_{A_{p_0}})\|f\|_{L^{p_0}(w)}, \qquad \forall w \in A_{p_0}, \qquad p_0 \geq 1,$$

entonces, para todo $p > 1$,

$$\|g\|_{L^p(w)} \leq \widetilde{N}(\|w\|_{A_p})\|f\|_{L^p(w)}, \qquad \forall w \in A_p.$$

Aplicación a operadores con valores vectoriales

Si $w \in A_p$, entonces

$$\left\| \left(\sum_j M(f_j)^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \leq C_w \left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)}.$$

Versión moderna (2011)

Si

$$\|g\|_{L^{p_0}(w)} \leq N(\|w\|_{A_{p_0}})\|f\|_{L^{p_0}(w)}, \qquad \forall w \in A_{p_0}, \qquad p_0 \geq 1,$$

entonces, para todo $p > 1$,

$$\|g\|_{L^p(w)} \leq \widetilde{N}(\|w\|_{A_p})\|f\|_{L^p(w)}, \qquad \forall w \in A_p,$$

donde

$$\widetilde{N}(\|w\|_{A_p}) \leq N\Big(C\|w\|_{A_p}^{\max\left(1, \frac{p_0-1}{p-1}\right)}\Big).$$

O. Dragičević, L. Grafakos, M. C. Pereyra y S. Petermichl, Publ. Mat. **49** (2005), 73–91.

Duoandikoetxea, J. Funct. Anal. **260** (2011), no. 6, 1886–1901.

Teoría de extrapolación de Rubio de Francia

Teorema

Sea T un operador tal que, para algún $p_0 \geq 1$ y todo $w \in A_{p_0}$,

$$T : L^{p_0}(w) \longrightarrow L^{p_0}(w)$$

es acotado. Entonces, para todo $p > 1$ y todo $w \in A_p$,

$$T : L^{p}(w) \longrightarrow L^{p}(w)$$

es acotado.

Teoría de extrapolación de Rubio de Francia

Teorema

Sea T un operador tal que, para todo $w \in A_1$,

$$T : L^1(w) \longrightarrow L^{1,\infty}(w)$$

es acotado. Entonces, para todo $p > 1$ y todo $w \in A_p$,

$$T : L^p(w) \longrightarrow L^p(w)$$

es acotado.

Sin embargo:

$$T : L^{p_0}(w) \longrightarrow L^{p_0}(w), \qquad \forall\, w \in A_{p_0}.$$

$$\not\Downarrow$$

$$T : L^{1}(w) \longrightarrow L^{1,\infty}(w), \qquad \forall\, w \in A_{1}.$$

Teoría de extrapolación de Rubio de Francia

Corolario

Si T es un operador tal que, para todo $p > 1$ y todo $w \in A_p$,

$$T : L^p(w) \longrightarrow L^{p,\infty}(w)$$

es acotado, con constante $C_p \|w\|_{A_p}^{\alpha}$, entonces, para todo $\varepsilon > 0$,

$$T : L(\log L)^{\varepsilon}(u) \longrightarrow L^1_{\mathrm{loc}}(u), \qquad \forall u \in A_1.$$

Definición

$$L(\log L)^{\alpha} = \left\{ f : \int |f(x)| \Big(1 + \log^+ |f(x)| \Big)^{\alpha} dx < \infty \right\}.$$

Espacios de Lorentz (1951)

$$L^{p,1} = \left\{ f : \|f\|_{L^{p,1}} = \int_0^\infty f^*(t) t^{1/p} \frac{dt}{t} < \infty \right\}$$

$$L^{p,\infty} = \left\{ f : \|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) < \infty \right\}.$$

Se cumple:

$$L^{p,1} \subset L^p \subset L^{p,\infty},$$

y, por tanto,

$$T : L^p \to L^p \quad \Longrightarrow \quad T : L^{p,1} \to L^{p,\infty}.$$

Extensión del Teorema de extrapolación de Rubio de Francia

Ya sabemos que

$$T : L^{p_0}(w) \longrightarrow L^{p_0}(w), \qquad \forall\, w \in A_{p_0}.$$

$$\not\Downarrow$$

$$T : L^1(w) \longrightarrow L^{1,\infty}(w), \qquad \forall\, w \in A_1.$$

Extensión del Teorema de extrapolación de Rubio de Francia

Por tanto,

$$T : L^{p_0,1}(w) \longrightarrow L^{p_0,\infty}(w), \qquad \forall\, w \in A_{p_0}.$$

$$\not\Downarrow$$

$$T : L^{1}(w) \longrightarrow L^{1,\infty}(w), \qquad \forall\, w \in A_{1}.$$

Extensión del Teorema de extrapolación de Rubio de Francia

Sin embargo:

$$T : L^{p_0,1}(w) \longrightarrow L^{p_0,\infty}(w), \qquad \forall\, w \in \widehat{A}_{p_0}.$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{1}(w) \longrightarrow L^{1,\infty}(w), \qquad \forall\, w \in A_{1}.$$

Teorema de extrapolación de Rubio de Francia

Candidato: Kerman-Torchinsky

$$M : L^{p_0,1}(w) \longrightarrow L^{p_0,\infty}(w),$$

$$\Updownarrow$$

$$\|w\|_{A_p^{\mathcal{R}}} = \sup_{E\subset Q} \left(\frac{w(Q)}{w(E)}\right)^{1/p} \frac{|E|}{|Q|} < \infty.$$

R. Kerman y A. Torchinsky, Studia Math. **71** (1982), no. 2, 277–284.

Teorema de extrapolación de Rubio de Francia

Caracterización de A_p

$$A_p = \left\{ u = (Mh_1)^{\theta_1} (Mh_2)^{(1-p)\theta_2} : 0 \leq \theta_j < 1,\ h_j \in L^1_{\text{loc}} \right\}$$

Caracterización de $\widehat{A}_p$

$$\widehat{A}_p = \left\{ u = (Mh_1)^{\theta_1} (Mh_2)^{(1-p)} : 0 \leq \theta_1 < 1,\ h_j \in L^1_{\text{loc}} \right\}$$

Teorema de extrapolación de Rubio de Francia

Teorema

Si T es un operador tal que, para todo $w \in \widehat{A}_{p_0}$,

$$T : L^{p_0,1}(w) \longrightarrow L^{p_0,\infty}(w)$$

es acotado, entonces (esencialmente) para todo $u \in A_1$,

$$T : L^1(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u).$$

!FIN!

MUCHAS GRACIAS POR VUESTRA ATENCIÓN