Riesgo, seguros, matemáticas

Josechu Fernández UAM (joseluis.fernandez@uam.es)

Universidad Carlos III, 8 de abril de 2011

- A) Compañía de seguros: de primas a capital.
- *Inciso.*) Alfabetización financiera.
- B) Largo plazo: inversiones.
- C) Riesgo endógeno.

A) Compañía de seguros: de primas a capital

¿Qué es una **compañía de seguros** (con ojos matemáticos)?

- . . . desde primas; tarificación de pólizas.
- . . . hasta reservas/capital; fondos que se precisan para ¿garantizar? solvencia.

Compañía de seguros de autos

Supondremos cartera homogénea de pólizas de autos. $\boxed{N = 1000}$

- autos similares
- conductores similares
- daños cubiertos similares
- ...
- similares ... idénticamente distribuidos

$\Rrightarrow$ Unión Europea. Autos, pensiones.

Estadística

Disponemos de estadísticas filtradas, auditadas, que para una cartera "análoga" *en el pasado* nos dice que en un año TÍPICO,

TABLA ESTADÍSTICA

Siniestro	Frecuencia
π_1	p_1
π_2	p_2
$\cdots$	$\cdots$
π_n	p_n

- $\pi_1 = 0$, no hay siniestro;
- p_1 es la frecuencia más grande.

Siniestro=variable aleatoria (de Estadística a Probabilidad)

Interpretamos que esa estadística es fruto de algún mecanismo aleatorio, regular en la frecuencia virtual con la que aparecen los resultados.

Así

siniestro de asegurado=variable aleatoria $\to X$

con distribución de probabilidad

$$\mathbf{P}\Big(X = \pi_j\Big) = p_j\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

La esperanza de la pérdida/siniestro (siniestro promedio) es

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \pi_j p_j$$

¿Qué pagos ha de hacer la compañía de seguros?

Si $N = 1000$ es un "gran número", la Ley de los Grandes Números (LdGN) nos dice que se debe esperar siniestros

$$\begin{array}{rcl} \text{montante} \rightarrowtail \pi_1 & \longrightarrow & 1000 \times p_1 \leftarrowtail \text{frecuencia esperada} \\ \pi_2 & \longrightarrow & 1000 \times p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_n & \longrightarrow & 1000 \times p_n \end{array}$$

Total esperado de pagos que ha de hacer la compañía

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(1000 \times p_j)}_{\text{frecuencia}} \times \underbrace{\pi_j}_{\text{montante}}$$

+ Prima (pura)

Valoración de póliza [Huygens]:

repartir el total esperado de pagos entre los asegurados:

$$\frac{\text{montante de pagos total esperado}}{\text{número de asegurados}} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(1000 \times p_j) \times \pi_j}{1000}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j \times \pi_j$$

$$= \boxed{\mathbf{E}(X)}$$

$$= \textbf{prima pura}$$

EJEMPLO

Por ejemplo,

90 %	no tiene pérdida/siniestro
10 %	siniestro de 3000 euros

- pérdida media$=\mathbf{E}(X)=$ $\boxed{\text{300 euros} \leftarrow \text{prima pura}}$,
- los 1000 asegurados pagan un total de 300000 euros en primas
- los 100 con accidentes reciben

$$100 \times 3000 \text{ euros} = 300000 \text{ euros}$$

Justos por . . . pecadores

- justos $\leftarrowtail -300$
- pecadores $\leftarrowtail +2700$

+ Gastos y comisiones . . .

. . . para gestionar pólizas, para administración, por gastos, salarios y otros costes, . . .

. . . la prima se incrementa para cubrir estos gastos y costes.

EJEMPLO

Si gastos y costes anuales son 30000 euros,
la prima pura se incrementará en, por ejemplo,
30 euros, hasta los 330 euros.

$+$ ¿Grandes Números?

$$\mathcal{Z} = \text{montante total de siniestros} = \boxed{\sum_{i=1}^{1000} X_i} = \sum \text{siniestros individuales}$$

Se supone independencia entre los siniestros, es decir, entre las X_i's, y una distribución común: las X_i's son iid.

$\mathcal{Z}$ es variable aleatoria.

- Sólo en la situación de la LdGN, $\mathcal{Z}$ es determinista (constante).

$$\mathcal{Z} \equiv 1000 \times \mathbf{E}(X) = 1000 \times \text{prima pura}$$

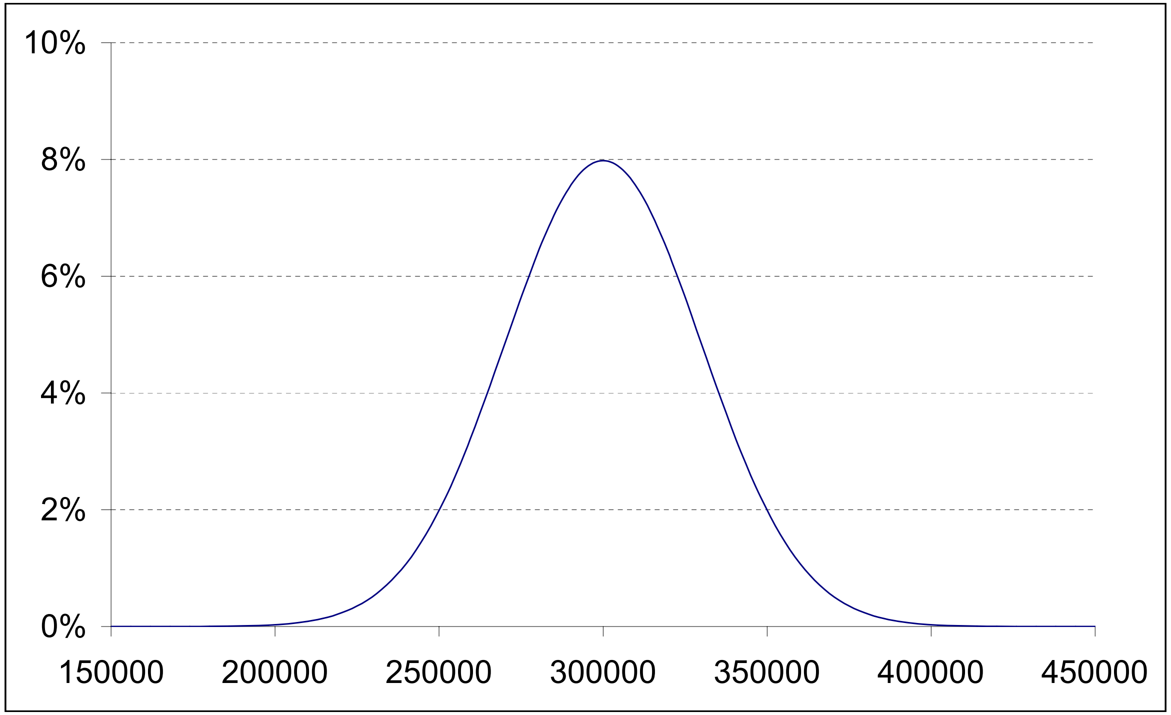
- La variable totalizadora $\mathcal{Z}$ puede oscilar, y de hecho, oscilará.

- Si la prima fuera sólo prima pura: ¿qué pasaría si $\mathcal{Z}$ alcanzara un valor mayor que $\mathbf{E}(\mathcal{Z})$? No habría dinero para pagar todos los siniestros.

- Las primas deben bastar para cubrir esas oscilaciones *naturales*; por ejemplo, para cubrir los valores de $\mathcal{Z}$ hasta el percentil 97,5 % (algo que ocurre 1 de cada 40 veces).

Si N es bastante grande, ¿$N = 1000$?

$$\mathcal{Z} \approx \mathcal{N}\mathsf{ormal}\Big(\mathbf{E}(\mathcal{Z}), \sigma(\mathcal{Z})\Big)$$



Distribución de $\mathcal{Z}$

Como para una variable normal estándar, el 97,5 % de sus valores quedan por debajo del valor 2 (redondeando); la pérdida en ese del 97,5 % percentil alcanzaría

$$\mathbf{E}(\mathcal{Z}) + 2\sigma(\mathcal{Z})$$

y la prima necesaria para cubrir hasta ese nivel sería

$$\frac{\mathbf{E}(\mathcal{Z}) + 2\sigma(\mathcal{Z})}{1000} = \text{prima pura} + \frac{\text{recargo por incertidumbre}}{\text{a repartir entre asegurados}}$$

EJEMPLO

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathcal{Z}) & = 300000 \\ \sigma(\mathcal{Z}) & = 3000 \cdot \sqrt{1000 \times 10\,\% \times 90\,\%} = 28460 \end{cases}$$

así que $\mathbf{E}(\mathcal{Z}) + 2\sigma(\mathcal{Z}) = 300000 + 2 \times 28460 = 356921$ euros y la prima debería ser al menos

$$\frac{356921}{1000} = 357 \text{ euros}$$

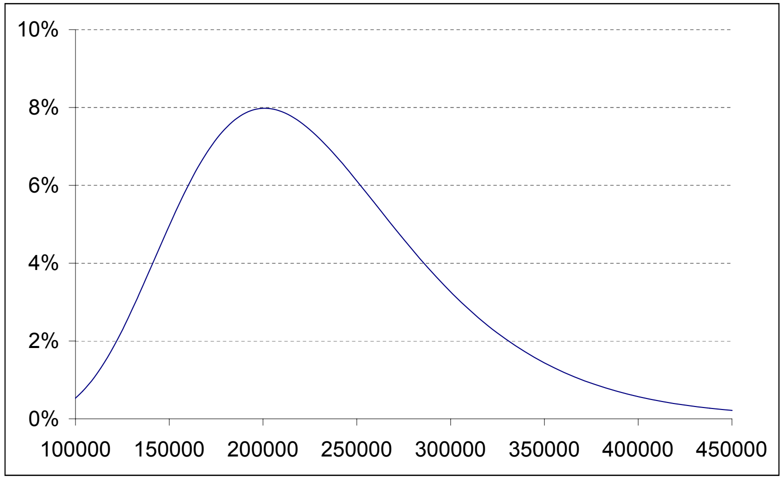
más los 30 euros de comisiones.

¿Cubre esta prima todos los posibles siniestros? NO.

Para cubrir todos los posibles siniestros haría falta que cada asegurado pagará una prima de 3000 que es el montante total asegurado.

Volveremos sobre esto.

Si N no es tan grande, la distribución no será aproximadamente normal:



DISTRIBUCIÓN DE $\mathcal{Z}$

Entonces hay que determinar z tal que $\mathbf{P}(\mathcal{Z} > z + E(\mathcal{Z})) = 2,5\,\%$ y

$$\text{prima} = \frac{z + E(\mathcal{Z})}{1000}$$

Cuanto mayor sea el número de asegurados, más proxima será la prima a la prima pura.

+ Capital

Accionistas ponen capital para cubrir los siniestros más allá de lo recaudado en primas.

Pongamos que los accionistas cubren hasta el 99,9 %, es decir, el tramo de siniestros desde el 97,5 % hasta el 99,9 %.

Si N grande:

Usamos la aproximación normal y como

$$\mathbf{P}\Big(\mathcal{Z} > \mathbf{E}(\mathcal{Z}) + 3\sigma(\mathcal{Z})\Big) = 0,1\,\%$$

el capital K debe cubrir

$$\begin{aligned} K &= \Big[\mathbf{E}(\mathcal{Z}) + 3\sigma(\mathcal{Z})\Big] - \Big[\text{primas}\Big] \\ &= \Big[\mathbf{E}(\mathcal{Z}) + 3\sigma(\mathcal{Z})\Big] - \Big[\mathbf{E}(\mathcal{Z}) + 2\sigma(\mathcal{Z})\Big] = \sigma(\mathcal{Z}) \end{aligned}$$

Así que los accionistas han de poner $\sigma(\mathcal{Z})$, la desviación típica de $\mathcal{Z}$.

EJEMPLO

$K = \sigma(\mathcal{Z}) = 28460$ euros

Los accionistas, que arriesgan su dinero, requieren remuneración, digamos de 20 %. Es decir, han de recibir 5692 euros, que incrementa la prima individual en otros

$$6 \approx \frac{5962}{1000}.$$

EJEMPLO

Prima=300+30+57+6=393 euros

+ ¿independientes?

Pero, ¿va a ser el el año que viene un año típico, normal?

Estudio inicial estadístico: AÑO TÍPICO tiene distribución $\mathcal{Z}$.

Pero si se analizan con más detalle los datos se verá que, (estilizadamente),

- en un año bueno (que ocurre $1/3$ de los años) la distribución de siniestros es menos severa,

- en un año malo (que ocurre $1/3$ de los años) la distribución es más severa.

Para cada año dado, fijado, condicionando, . . . , los siniestros son independientes, pero, en realidad, sobre el año genérico son dependientes.

Hay que incrementar la prima, el capital para cubrir ese año malo.

ILUSTRACIÓN

Tenemos dos monedas,

1. Cara 1/3 de las veces
2. Cara 2/3 de las veces

A) Se escoge al azar con probabilidad de 50 % una de las dos monedas y se lanza una vez, y se vuelve a escoger al azar una de las monedas y se lanza una vez . . . $\mathbf{P}(2 \text{ caras}) \ldots = \frac{1}{4}$

B) Se escoge al azar con probabilidad de 50 % una de las dos monedas y se lanza dos veces esa moneda. . . $\mathbf{P}(2 \text{ caras}) \ldots = \frac{5}{18}$

+Solvencia a largo plazo. Probabilidad de ruina.

Objetivo determinar capital $\boxed{K}$ para que la compañía dure, y dure, y dure . . . .

- Los pagos por siniestros de años sucesivos

$$\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \ldots$$

son muestras independientes de una misma variable.

- Las primas recaudadas cada año alcanzan P, montante constante.

Queremos que K sea tal para que con alta probabilidad

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mathcal{Z}_j}_{\text{siniestros}} < \underbrace{nP}_{\text{primas}} + \underbrace{K}_{\text{capital}}, \qquad \underline{\text{para todo } n}$$

o, con $\mathcal{Y}_j = \mathcal{Z}_j - P$, que $\sum_{j=1}^{n} \mathcal{Y}_j < K$.

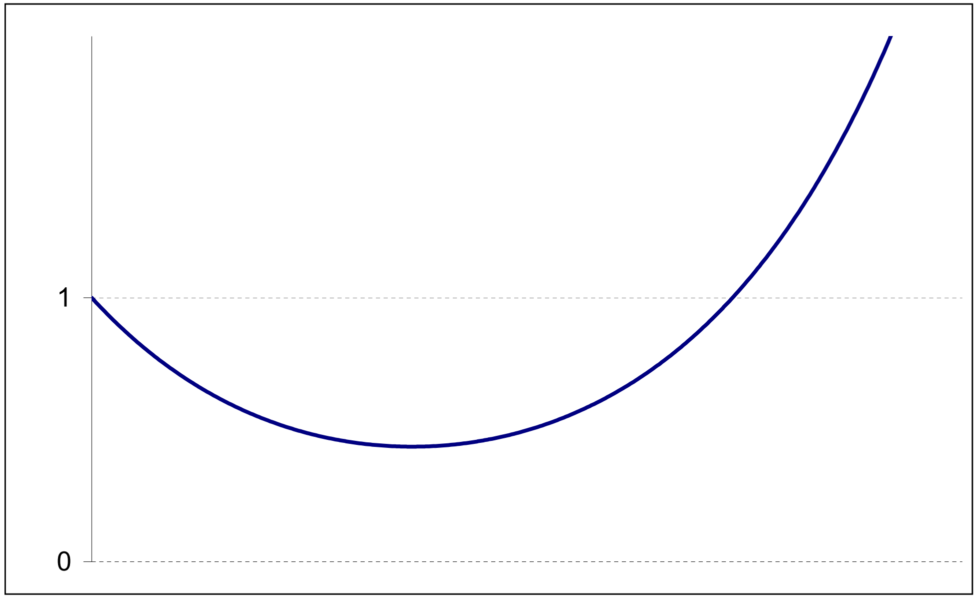
Se busca K para que, con un $\alpha\,\%$ pequeño dado, $(\alpha = 0,1\,\%)$

$$\boxed{\mathbf{P}(\text{Ruina}) = \mathbf{P}\Big(\text{algún } n; \sum_{j=1}^{n} \mathcal{Y}_j > K\Big) \leq \alpha}$$

A la Markov, Chernoff (large deviations)

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{j=1}^{n} \mathcal{Y}_j > K\Big) \leq \frac{\mathbf{E}\Big(e^{t\sum_j \mathcal{Y}_j}\Big)}{e^{tK}} = \frac{\mathbf{E}\Big(e^{t\mathcal{Y}}\Big)^n}{e^{tK}}$$

GRÁFICA DE $\boxed{t \to \Psi(t) = \mathbf{E}(e^{t\mathcal{Y}})}$



Como

- $\Psi(0) = 1$
- $\Psi'(0) = \mathbf{E}(\mathcal{Y}) = \mathbf{E}(\mathcal{Z}) - P < 0$, ¡faltaría más!
- $\Psi''(t) = \mathbf{E}(\mathcal{Y}^2 e^{t\mathcal{Y}}) > 0$, convexo

Buscamos y encontramos τ tal que $\Psi(\tau) = \mathbf{E}\Big(e^{\tau\mathcal{Y}}\Big) = 1$

Con ese τ se tendría que

$$\underline{\text{para cualquier año}}\ n; \qquad \mathbf{P}\Big(\sum_{j=1}^{n} \mathcal{Y}_j > K\Big) \le \frac{\mathbf{E}(e^{\tau \mathcal{Y}})}{e^{\tau K}} = e^{-\tau K}$$

De hecho, más aún, CRAMER:

$$\mathbf{P}\Big(\text{algún} \quad n; \sum_{j=1}^{n} \mathcal{Y}_j > K\Big) \le e^{-K\tau}$$

Así que

$$\boxed{\text{capital} = \frac{1}{\tau} \ln(1/\alpha) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}\Big(\text{Ruina}\Big) \le \alpha}$$

Nota

CRAMER Con $U_j = \sum_{i=j}^{n} Y_i$; por inducción

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\max_{j\leq n} U_j > R\right) &\leq \sum_{y_r\leq R} \mathbf{P}\left(\max_{j\leq n-1} U_j > R - y_r\right)\mathbf{P}\left(Y = y_r\right) + \mathbf{P}\left(Y > R\right) \leq \\
&= \sum_{y_r\leq R} e^{-\tau(R-y_r)} p_r + \mathbf{P}\left(Y > R\right) \\
&= e^{-\tau R}\sum_{y_r\leq R} e^{\tau y_r} p_r + \sum_{y_r>R} p_r \leq \\
&\leq e^{-\tau R}\sum_{y_r} e^{\tau y_r} p_r \\
&= e^{-\tau R}\mathbf{E}\left(e^{\tau Y}\right) \\
&\leq e^{-\tau R}
\end{aligned}$$

EJEMPLO

- $\mathcal{Z} = \mathcal{N}\text{ormal}\Big(\mathbf{E}(\mathcal{Z}), \sigma(\mathcal{Z})\Big)$
- $P = \mathbf{E}(\mathcal{Z}) + 2\sigma(\mathcal{Z})$
- $\mathcal{Y} = \mathcal{Z} - P = \mathcal{N}\text{ormal}\Big(-2\sigma(\mathcal{Z}), \sigma(\mathcal{Z})\Big)$
- $K = \frac{\sigma(\mathcal{Z})}{4} \ln(1/\alpha)$

Con $\alpha = 0,1\,\%$, $K = 49149$ euros.

Nota

- Si X normal estándar, entonces $\mathbf{E}(e^{tX}) = e^{t^2/2}$
- $\mathbf{E}(e^{t\mathcal{Y}}) = e^{-2t\sigma(\mathcal{Z})+t^2\sigma(\mathcal{Z})^2/2}$
- $-2\tau\sigma(\mathcal{Z}) + \tau^2\sigma(\mathcal{Z})^2/2 = 0 \Rrightarrow \tau = 4/\sigma(\mathcal{Z})$

+ incertidumbres

- $\mathcal{Z}_j$ no son idénticamente distribuidas, ni independientes,
- riesgo de estimación,
- incertidumbre sobre montante de primas,
- . . .

¿Incentivos, competencia?

Y si se reducen las primas . . . por competir . . . ?

Y si se aceptan más pólizas . . . con el mismo capital . . . ?

Créditos

impago=siniestro
técnica similar, más volátil (sensible al ciclo)
punto de silla, FFT, . . .

Inciso: Alfabetización financiera

B.1) Comisiones

Fondo de pensiones:

- se aporta 100 cada año
- la cía le consigue a Vd. un rendimiento de 4 % por año
- comisiones alternativas

A) 2 % anual sobre patrimonio
B) 10 % sobre aportación

A comparar

B.2) Hipotecas a Euribor

Banco/Caja:

- toma prestado (MAYORISTA) a Euribor + diferencial,
- presta (minorista) a Euribor + DIFERENCIAL

No sin riesgo, pero ¿préstamos a particulares indiciados a (vaivenes, volatilidad) de mercados monetarios?

B.3) . . . . . .

Asimetría, información, . . .

C) Largo plazo: inversiones

Compañía de (seguros de) Vida, Pensiones, . . . , largo plazo.

Ha de invertir las primas percibidas, para que generen las prestaciones de pensiones, de rentas, de seguros de vida, que ocurrirán más tarde (mucho más tarde) en el futuro.

Fundación Nobel.

Invertir, ¿en qué?

- En Deuda del Estado, (estable, ¿estable?).
- En Cédulas hipotecarias, (estable, ¿estable?).
- En renta fija privada (títulos de deuda de empresas) de ¿buena calidad crediticia? BOE (volátil).
- En . . .
- Instrumentos financieros en los que se obtiene mayor rentabilidad, a priori, si se acepta más riesgo (cubriendo riesgo de contraparte o de terceros, o cuartos, . . .).

- ¿Estadísticas?
- ¿Fuente de aleatoriedad regular y estable?
- ¿Sirve el paradigma estadístico usado en el pasivo?
- . . .

Diversificación $\longrightarrow$ correlación.

Correlación cambia (parece) cuando movimiento extremos y estresados, así que . . .

C) Riesgo endógeno y feedback

El riesgo endógeno es el riesgo que proviene no de factores exógenos sino aquél que el propio sistema (financiero) genera y amplifica.

Los sistemas de riesgo al uso en las entidades financieras, de crédito o de seguros, intentan cubrir los riesgos exógenos.

El riesgo endógeno se genera por acciones combinadas de los agentes, que retroalimentan el sistema, precisa y perversamente.

La propia acción de cubrir, de protegerse contra, esos riesgos exógenos generan riesgos (endógenos), que acaban siendo sistémicos y potencialmente mucho más dañinos.

Metáforas varias

El puente del Millenium (Danielson)

A priori, la probabilidad de sincronía en el paso es cero.

Pequeña perturbación externa, fuerza, por reacción, cierta sincronización del paso, que genera más perturbación, lo que a su vez reclama más sincronía, . . . , y así, hasta la casi sincronía total de la acciones, y . . . , el colapso.

Ruleta vs póker

Los sistema de riesgo al uso se enfrentan con el riesgo como si se tratara de gestionar el riesgo de un juego de ruleta o de lotería, donde hay un mecanismo aleatorio completamente externo sobre el que no se incide.

La realidad es que es más como las siete y media o, mejor, como el póker, en la que hay un mecanismo aleatorio, pero donde las acciones de los intervinientes cambian las probabilidades y generan acciones en otros intervinientes que cambian las probabilidades, ...

Mecanismos aleatorios retroalimentados.

El crash del 87

La inmunización de carteras consiste en incorporar a la cartera un instrumento que cubran las potenciales caídas (de un cierto tamaño relevante) con un cierto horizonte temporal largo. No hay tal instrumento en el mercado (si lo hubiera, el efecto sería el mismo), sino que hay que sintetizarlos.

El instrumento sintetizador es una opción put. Se sintetiza con contado y posición corta (de venta al descubierto) de índice (porque es para una cartera amplia). La cantidad de contado y de posición corta se va adaptando según vaya evolucionando las cotizaciones.

Suena bien. Cada tesorería, cada fondo de pensiones o de inversión, opta por esta estrategia. De hecho la gestión sintética puede automatizarse, encomendársela a un ordenador.

Si el índice baja o sube normalmente, todo fluye sin contratiempos.

Si, de repente hay una bajada de cierta importancia, la gestión de la inmunización sintética obliga a aumentar la posición corta en el índice, es decir, a vender índice, simultáneamente, de todos las tesorerías, de las gestoras, los que hará bajar las cotizaciones, lo que obliga a vender más, ...

Y perversamente, endógenamente, por sí mismo, (con ordenadores cumpliendo a rajatabla) se da lugar a un crash.

- Crash del 87
- LTCM, Dollar/yen 98
- Ingrediente de 2007. Titulizaciones hipotecarias, volumen de credit default swaps,. . .
- La megacrisis del 2018-2019

$\Rrightarrow$ Cuando la gestión es diversificada y granular (las acciones de cada uno no afectan al sistema), atender al riesgo exógeno con los sistema al uso puede ser suficiente.

$\Rrightarrow$ Cuando la gestión no es diversificada (hay mucha gente haciendo exactamente lo mismo, con posiciones muy apalancadas (todo va bien), cubiertas/protegidas/inmunizadas (gestionando el riesgo), la gestión del riesgo exógeno no sólo no sirve de nada (atiende a los riesgos equivocados) sino que además retroalimenta el riesgo real, hasta la caída libre.